Merenje i greške merenja

Termin 3

Šta ćete raditi danas?

- Zaokruživanje brojeva,
- Pravila zaokruživanja,
- Sigurne , nesigurne, značajne ciffre...
- Pojmovi preciznosti i tačnosti
- Sistematske i slučajne greške
- Procenjivanje grešaka
- Apsolutna, relativna greška
- Greška izvedenog rezultata

Značajne cfire

U civilizaciji u kojoj živimo koristimo se dekadnim sistemom brojeva (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9). U ovom sistemu brojevi nose sa sobom neku informaciju. Jedan sto – 1; dva polaznika - 2; tri jabuke – 3; ništa novca na računu – 0. Dakle, date cifre su nam od nekog značaja (značajne cifre) jer nose informaciju o merenoj veličini. Broj nula je jedinstven jer pored informativne vrednosti njime se služimo da ostale cifre dovedemo na određenu poziciju. Tako jedna nula iza broja označava desetice, dve nule stotine, tri hiljade itd. U ovom slučaju broj nula ne predstavlja značajnu cifru. Pitanje koliko neki broj ima značajnih cifara se upravo svodi na rešavanje ove dileme, kada je nula značajna cifra, a kada ne.

Primer 1. Značajne cifre

Odrediti broj značajnih cifara u sledećim brojevima:

15,13	4
1513	4
15013	5
0,001513	4
0,15130	5

U prvom broju sve četri cifre su značajne jer tako naveden rezultat pretpostavlja da je zaista izmereno 15,13 jedinica merene vrednosti, sa tačnošću na stotim delovima. Isto važi i za drugi broj. Kod trećeg broja očigledno je da je uloga dve poslednje nule da dovedu cifre 1513 na određenu poziciju, te osim toga nemaju nikakv drugi značaj – nisu značajne cifre. Kod broja 15013 jasno je da se nule izmedju drugih cifara koje nisu nule moraju uzeti kao značajne cifre te stoga ovaj broj ima pet značajnih cifara. U broju 0,001513 tri nule služe da cifre 1513 dovedu na određeni položaj te stoga nemaju značaj i ovaj broj zato ima 4 značajne cifre. Kod poslednjeg slučaja treba obratiti naročitu pažnju. Nula na kraju decimalnog zapisa mora biti smatrana značajnom cifrom, u ovom slučaju ona služi da demonstrira preciznost sa kojom je izvršeno merenje (na 10^{-5}). Klasičan primer je navođenje koncentracije nekog standardnog rastvora C=0,1000mol/dm^3. Nule iza zareza ukazuju na analitičku preciznost sa kojom je ova koncentracija određena.

Značajne cifre obuhvataju tzv. sigurne cifre i nesigurnu cifru (tj. cifru na kojoj se nalazi greška).

Primer 2. Značajne cifre – sigurne i nesigurne

Navesti sigurne cifre i nesigurnu cifru za svaki od brojeva iz primera 1.

15,13	sigurne: 1,5,1	nesigurna:3
1513	sigurne: 1,5,1	nesigurna:3
15013	sigurne: 1,5,0,1	nesigurna:3
0,001513	sigurne: 1,5,1	nesigurna:3
0,15130	sigurne: 1,5,1,3	nesigurna:0

Primer 3. Značajne cifre – na osnovu apsolutne nesigurnosti

U sledećem broju odrediti značajne cifre (sigurne i sumnjivu cifru).

12,400483217±0,001

Ovakav zapis nosi informaciju i o grešci sa kojom je izmerena neka vrednost. Vidi se da je greška (±0,001) na hiljaditim delovima, pa je jedino smisleno zadržati cifre sve do ovog mesta iza decimalnog zareza. Zbog toga su 1,2,4,0,0 značajne cifre. Poslednja cifra - nula je sumnjiva jer je opterećena greškom dok su sve preostale cifre nepotrebne i kao takve treba ih izbaciti iz konačnog zapisa rezultata (12,400±0,001).

Pravila zaokruživanja brojeva

Nekakav broj možemo zapisati kao: $n,d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_kd_{k+1}...d_m$ pri čemu je *n* ceo broj a $d_1,d_2,...,d_n$ odgovarajuće decimale. Ako želimo da dati broj zaokružimo na *k* decimala onda postupamo na jedan od sledećih načina:

a) Ako je $d_{k+1}‹5$, tada zaokruženi broj ima oblik $n,d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_k$
b) Ako je $d_{k+1}›5$, tada zaokruženi broj ima oblik $n,d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_k+1$
c) Ako je $d_{k+1}=5$ i bar jedan od decimala iza njega je različit od nule tada se postupa kao pod b)
d) Ako je $d_{k+1}=5$ i svi ostali decimali, ako ih uopšte ima, su nule onda razlikujemo dva slučaja: ako je d_k parno postupa se kao u slučaju a) ako je d_k neparno postupa se kao u slučaju b).

Primer 4. Zaokruživanje brojeva

Zaokružiti na tri decimale sledeće brojeve:
1,45549; 2,45977; 3,455501; 4,9985; 5,999500

Rešenje: 1,445; 2,460; 3,456; 4,998; 6,000

Primer 5. Zaokruživanje brojeva

Zaokružiti na tačnost do na stotinu sledeće brojeve:
145549,88; 245977; 34550,1; 49850; 599950,0

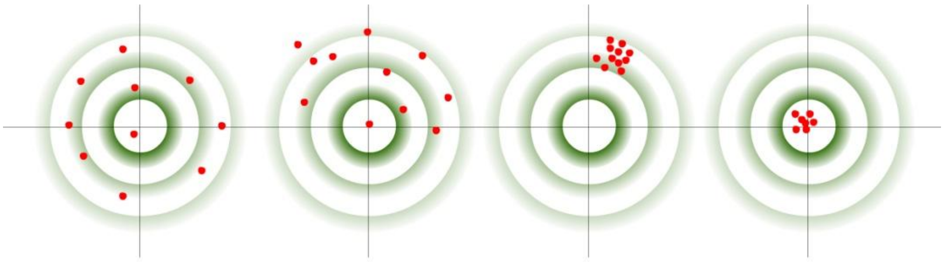
Rešenje: 145500; 345600; 49800; 60000

Greške merenja

Preciznost – bliskost određenog rezultata sa drugim rezultatima dobijenim na potpuno isti način; veličina koja opisuje reproduktivnost merenja.

Tačnost – bliskost određenog rezultata stvarnoj ili prihvatljivoj vrednosti.

Tačnost određuje slaganje između rezultata i njihove stvarne vrednosti, dok preciznost opisuje slaganje između više rezultata koji su dobijeni na isti način. Preciznost možemo odrediti jednostavnim ponavljanjem merenja, dok tačnost nikada ne možemo sigurno da odredimo jer nikada ne možemo da znamo stvarnu vrednost merenja.



Slika 1. Vežba u streljaštvu Diskutujte rezultate strelaca A, B, C i D.

Tačnost se izražava pomoću termina apsolutne i relativne greške.

<u>*Apsolutna greška*</u> – razlika između eksperimentalnog rezultata i prave vrednosti:

$$\Delta = |\mu - x|$$

Δ – apsolutna greška merenja, *μ* - prava vrednost, *x* – merena vrednost.

d ima dimenzije merene veličine.

Δ uvek treba procenjivati u odnosu na pravu vrednost. Voditi računa prilikom korišćenja apsolutne greške kao merila tačnosti!!!

<u>*Relativna greška*</u> – količnik apsolutne greške i stvarne vrednosti:

$$\delta = \frac{\Delta}{\mu} = \frac{|\mu - x|}{\mu}$$

Bezdimenzionalna veličina; izražava se u procentima ili promilima kkao se ne bi izazvala zabuna ukoliko se izražava greška merenja datih u procentima

Funkcije rasipanja rezultata oko srednje vrednosti poput **standardne devijacije, varijanse i koeficijenta varijanse**, koriste se za opisivanje preciznosti rezultata Sa njima ćete se upoznati na nekom od sledećih termina

Primer 6. Tačnost dve analitičke metode

Dve različite analitičke metode upotrebljene su za analizu dva metala u leguri.
Dobijeni su sledeći rezultati:
μ_1 = 32,6 %, d_1 = 0,3 %,
μ_1 = 7,91 x 10^{-3} %, d_1 = 0,63 x 10^{-3} %.
Koji je metal određen tačnije?

$$\delta_1 = \frac{0{,}3}{32{,}6} \times 100 = 0{,}92\% \qquad \delta_2 = \frac{0{,}63 \times 10^{-3}}{7{,}91 \times 10^{-3}} \times 100 = 8{,}00\%$$

Kada je μ nepoznato: $\Delta x = |\bar{x} - x|$

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}$$

Δ – devijacija od srednje vrednosti – mera preciznosti pojedinačnog određivanja

Pravila za zaokruživanje rezultata merenja

- ✓ Grešku zaokružujemo na jednu značajnu cifru. Nema smisla greške prikazivati sa više cifara jer neodređenost (nepreciznost) demonstrirana prvom cifrom isključuje preostale. Opravdano je grešku prikazati sa više cifara ukoliko će se dati podatak koristiti u daljim statističkim proračunima pa bi se na taj način sprečio nepotreban gubitak informacija.
- ✓ Izračunati broj zaokružujemo na istu tačnost kao i apsolutnu grešku.
- ✓ Prilikom računske obrade podataka ne treba zaokruživati ni jedan međurezultat; zaokružuje se samo krajnji rezultat.

Sabiranje i oduzimanje –
- apsolutna nesigurnost rezultata ne sme da bude manja od najnesigurnije vrednosti koja podleže sabiranju, odnosno oduzimanju.

Množenje i deljenje –
- relativna nesigurnost rezultata treba da bude jednaka onoj koju ima komponenta sa najvećom relativnom nesigurnošću;
- proizvod i količnik treba da sadrže onoliko značajnih cifara koliko ima i član sa najmanjim brojem značajnih cifara.

Logaritmovanje –
- rezultat treba da sadrži onoliko cifara desno od decimalnog zareza koliko ima značajnih cifara broj čiji se logaritam traži.

Stepenovanje i korenovanje –
- rezultat treba da sadrži onoliko značajnih cifara koliko ima broj koji se stepenuje ili korenuje.

Izračunavanje apsolutnih i relativnih grešaka izvedenog rezultata

Zbir i razlika: apsolutne greške se sabiraju, relativne se izračunavaju iz odnosa $\delta_y = \frac{dy}{y}$

$$y = x_1 + x_2 - x_3 \qquad dy = dx_1 + dx_2 + dx_3$$

Proizvod i količnik: relativne greške se sabiraju, apsolutne izračunavaju iz odnosa $d_y = e_y \times y$

$$y = \frac{x_1 \times x_2}{x_3}$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_3 \Rightarrow \delta_y = \delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3$$

Greške koje prate hemijsku analizu

Slučajne greške – neodređene
Greške koje utiču na preciznost merenja.
Prouzrokuju manje ili više simetričnu raspodelu rezultata oko srednje vrednosti.
Slučajne greške u rezultatima analiza mogu biti eliminisane statističkim metodama.

Sistematske greške – određene
Greške koje utiču na tačnost rezultata.
Prouzrokuju veliku razliku srednje vrednosti seta podataka od stvarne vrednosti.

Grube greške
Greške koje dovode do pojave rezultata koji se u velikoj meri razlikuju od ostalih rezultata.
Grube greške u rezultatima analiza mogu biti eliminisane statističkim metodama.

Zadaci

1) Izračunati apsolutnu grešku krajnjeg rezultata:

   a) y = 6,75 (±0,03) + 0,843 (±0,001) – 7,021(±0,001)

   b) y = 67,1 (±0,3) · 1,03 (±0,02)

   c) % Cr

$$y = \frac{40{,}64\ (\pm 0{,}04)\,\mathrm{cm}^3 \times 0{,}1027\ (\pm 0{,}001)\,\mathrm{mmol/cm}^3 \times \left(\frac{51{,}996\ (\pm 0{,}001)\,\mathrm{mg/mmol}}{3}\right)}{346{,}4\ (\pm 0{,}2)\,\mathrm{mg}} \times 100$$

   d) $y = \frac{[(B-A)-(D-C)] \times E}{(G-F)} \times 100$

   A = 1,38 (±0,02)
   B = 29,82 (±0,02)
   C = 0,89 (±0,02)
   D = 10,35 (±0,02)
   E = 0,00589 (±0,00006)
   F = 25,8943 (±0,0001)
   G = 26,7854 (±0,0001)

2) Izračunati maksimalnu vrednost relativnih grešaka merenja analitičkom vagom sledećih masa: 100g, 1g, 0,1g. Pri merenju koje mase je greška najveća?